Limites et ordre

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \le g(x)$ alors $\ell \le \ell'$
- Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \le f(x) \le g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(f+g)$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**pas de résultat général**

Limite d'un produit

Lim g \ Lim f	$\ell<0$	$\ell>0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'<0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell'>0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**pas de résultat général**
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
0	0	0			

Limite d'un quotient

Lim g \ Lim f	$\ell<0$	$\ell>0$	0 par des valeurs positives	0 par des valeurs négatives	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'>0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$+\infty$
0 par des valeurs positives	$+\infty$	$-\infty$	**pas de résultat général**		$+\infty$	$-\infty$
0 par des valeurs négatives	$-\infty$	$+\infty$			$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	0	**Pas de résultat général**	
$-\infty$	0	0	0	0		

- Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de "Forme indéterminée" Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par $\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

Quelque techniques usuelles pour lever les indéterminations

- Mise en facteur du terme prépondérant (dominant) exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2\left(1+\frac{x}{4x^2}\right)}-x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-x=\lim_{x\to+\infty}2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right)=+\infty$$

- Utilisation d'une quantité conjuguée exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$$

- Utilisation d'une factorisation exemple :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+3)}=\frac{3}{4}$$

Quelque limites remarquables

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$

▸ **Continuité**

Une fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

▸ **Théorème des valeurs intermédiaires**

- **Enoncée 1**
  f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$
- **Enoncée 2**
  f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et vérifiant $f(a)f(b)<0$ alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $f(c)=0$
- **Enoncée 3**
  f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et strictement monotone sur $[a,b]$ et vérifiant $f(a)f(b)<0$ alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $f(c)=0$

▸ **Dérivabilité**

- Une fonction f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}=\ell$$

- La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est à la fois dérivables à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

▸ **Dérivabilité d'une fonction composée**

- f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur l'intervalle $f(I)$ alors $(g\circ f)$ est dérivable sur I et on a $(g\circ f)'=f'\times(g'\circ f)$

▸ **Dérivées usuelles**

L'intervalle I	Fonction f définie sur I	Fonction dérivée f' de f sur I
IR	$f(x)=a \quad ,a\in IR$	$f'(x)=0$
IR	$f(x)=ax+b \quad ,a,b\in IR$	$f'(x)=a$
IR^*	$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
IR	$f(x)=x^n, n\in\mathbb{Z}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$
IR^*	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
IR	$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
IR	$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$IR\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$f(x)=\tan x$	$x\mapsto1+\tan^2x$

▸ **Règles générales de détermination des fonctions dérivées**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f définie sur I	Fonction dérivé f' de f sur I
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
$u^n \quad n\in\mathbb{Z}^*$	$n\times u'\times u^{n-1}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u\circ v$	$v'\times(u'\circ v)$

Etude de fonction - Cours

Extrema

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. si la fonction dérivée f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$

Interprétation graphique

La fonction f est dérivable sur un intervalle I	La courbe $\mathscr{C}f$ est lisse
$f'(x_0) = a$	La pente (le coefficient directeur) de la tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse x_0 est a
$f'(x_0) = 0$	$\mathscr{C}f$ possède une tangente horizontale en x_0
$f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$	$\mathscr{C}f$ possède deux demi-tangentes de directions différentes en $M(x_0, f(x_0))$: M est un point anguleux
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	$\mathscr{C}f$ possède une demi-tangente verticale au point $M(x_0, f(x_0))$
f'' s'annule en x_0 en changeant de signe	Le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}f$
f' s'annule en x_0 et ne change pas de signe	

Parité

- Une fonction f est dite paire si pour tout réel x de Df, on a $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$
- Une fonction f est dite impaire si pour tout réel x de Df, on a $-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$
- La courbe d'une fonction paire, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses
- La courbe d'une fonction impaire, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à l'origine

Périodicité

Soit f une fonction définie sur IR et T un réel strictement positif. La fonction f est périodique de période T si pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$

Axe de symétrie

Soit f une fonction définie sur D et soit la droite Δ d'équation $\Delta : x = a$. La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe de f si, et seulement si :

- Pour tout $x \in D$, $(2a - x) \in D$
- Pour tout $x \in D$, $f(2a - x) = f(x)$

Centre de symétrie

Soient f une fonction définie sur D et un point $\Omega(a,b)$. Ω est un centre de symétrie de la courbe de f si, et seulement si :

- Pour tout $x \in D$, $(2a - x) \in D$
- Pour tout $x \in D$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Branches infinies

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (éventuellement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$) alors la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote à la courbe de f
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ alors la droite $\Delta : y = a$ est une asymptote à la courbe de f
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe de f possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe de f possède une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

Etude des branches infinies

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ → $\Delta : y = b$ est une asymptote horizontale de $\mathscr{C}$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$:
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ → $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ → Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

a et b sont deux réel tel que $a \neq 0$

Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

- Toute fonction polynôme est définie, continue et dérivable sur IR
- Toute fonction rationnelle est continue et dérivables sur son domaine de définition

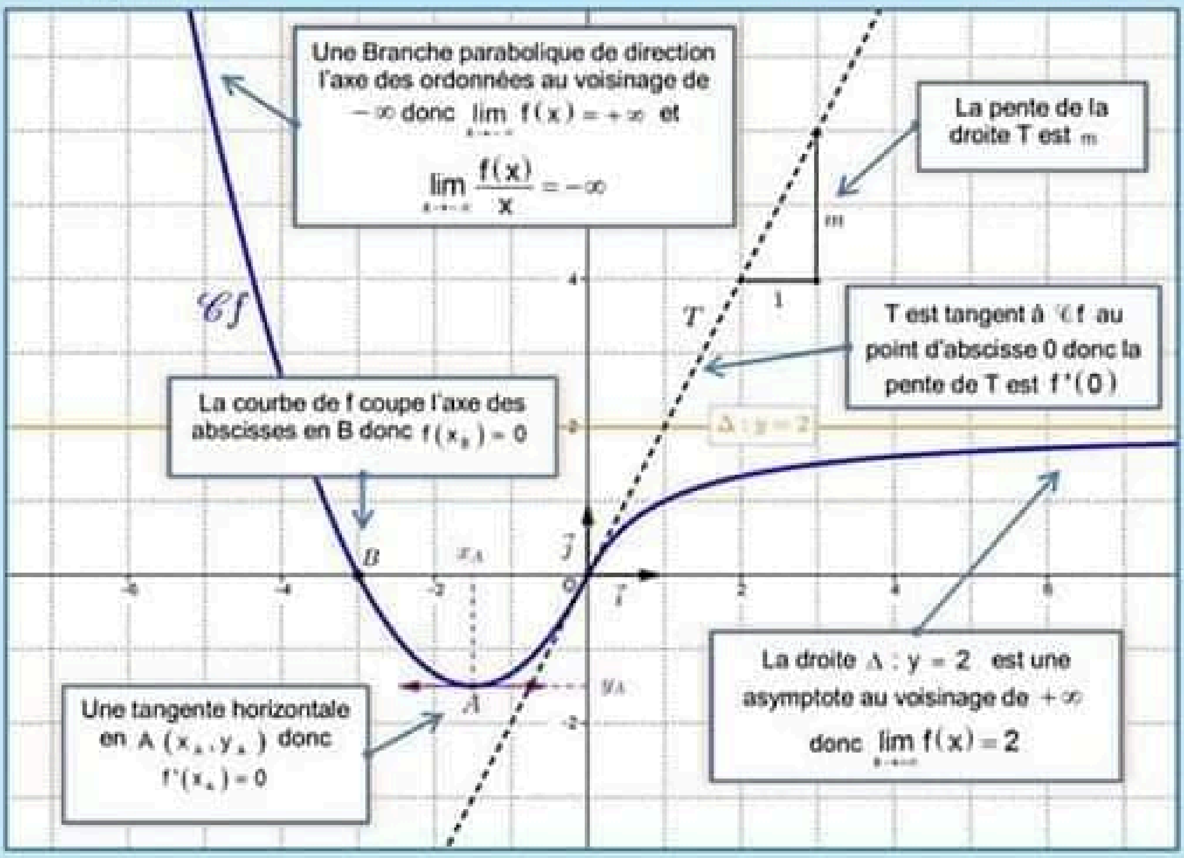
Position relative de deux courbes

- Pour étudier la position relative des courbes $\Gamma : y = f(x)$ et $\Gamma' : y = g(x)$ on étudie le signe de $f(x) - g(x)$:

Signe de $f(x) - g(x)$	+	−
Position relative de Γ et Γ'	Γ est au-dessus de Γ'	Γ est au-dessous de Γ'

- L'intersection des courbe $\Gamma : y = f(x)$ et $\Gamma' : y = g(x)$ est l'ensemble des points de Γ (ou Γ') dont les abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Lecture graphique



Théorème des accroissements finis

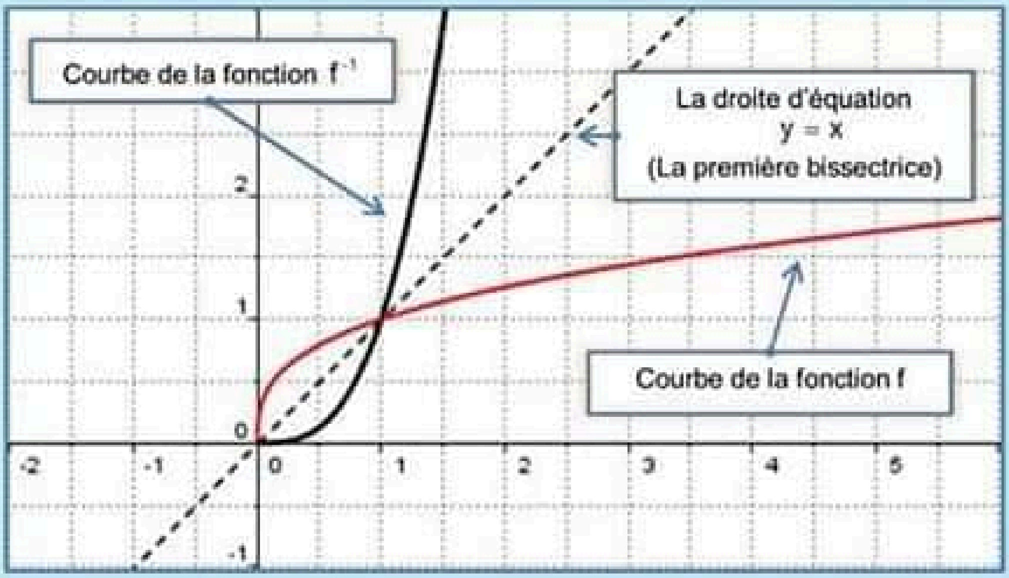
- Soient deux réels a et b tel que $a<b$. Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Géométriquement cela signifie qu'en au moins un point de la courbe de f, il existe une tangente de coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est-à-dire parallèle à la droite (AB) avec $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$

Inégalités des accroissements finis

- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et s'il existe deux constantes m et M telles que pour tout x de I, $m\le f'(x)\le M$ alors pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$ on a :
$$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$$
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et s'il existe un réel $k>0$ tels que pout tout x de I, $|f'(x)|\le k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b)-f(a)|\le k|b-a|$

Théorème de la bijection

- Si f est fonction strictement monotone sur un intervalle I de IR alors on a :
  - La fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$
  - La fonction réciproque f^{-1}, de f, a le même sens de variation que f
  - Pour tout x de I et pour tout y de $f(I)$ on a : $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
  - Si de plus, f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $J=f(I)$
  - Les courbes représentatives de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y=x$



Dérivée de la fonction réciproque

- Soit f une bijection d'un intervalle I de IR sur $J=f(I)$. Soit un réel x_0 de I et $y_0=f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a :
$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
- Soit une bijection d'un intervalle I de IR sur $J=f(I)$. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$

Fonction primitive d'une fonction continue

- F est une primitive de f sur l'intervalle I si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout $x\in I$ on a $F'(x)=f(x)$
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I
- Si F est une primitive de f alors $F+c$, avec c une constante réelle, est une primitive de f
- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une unique fonction primitive sur I telle que $F(a)=b$

- **Opérations sur les fonctions primitives**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et deux réels α et β. Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $\alpha F+\beta G$ est une primitive de la fonction $\alpha f+\beta g$ sur I

- **Primitives usuelles**

L'intervalle I	Fonction f définie sur I	Fonction primitive F de f sur I
IR	$x \mapsto a \;, a \in IR$	$x \mapsto ax + c, c \in IR$
IR	$x \mapsto ax \;, a \in IR$	$x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + c, c \in IR$
IR	$x \mapsto x^n \;, n \in \mathbb{Z}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, c \in IR$
IR^*	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c, c \in IR$
IR^*	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in IR$
IR	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
IR	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$
$IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c, c \in IR$
$IR \setminus \{k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\operatorname{cotan} x + c, c \in IR$
IR	$x \mapsto \cos(ax+b)$ $a \in IR^* \; b \in IR$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c, c \in IR$
IR	$x \mapsto \sin(ax+b)$ $a \in IR^* \; b \in IR$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c, c \in IR$
$IR \setminus \left\{x \in IR \;/ ax+b = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto 1 + \tan^2(ax+b)$ $a \in IR^* \; b \in IR$	$x \mapsto \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c, c \in IR$
$IR \setminus \{x \in IR \;/\; ax+b = k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto 1 + \operatorname{cotan}^2(ax+b)$ $a \in IR^* \; b \in IR$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\operatorname{cotan}(ax+b) + c, c \in IR$

- **Régles générales de détermination des fonctions primitives**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f définie sur I	Fonction primitive F de f sur I
$u'v + uv'$	$F = uv + c, c \in IR$
$u'u^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c, c \in IR$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c, c \in IR$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c, c \in IR$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c, c \in IR$
$(v' \circ u)u'$	$(v \circ u) + c, c \in IR$

DES ERREURS A EVITER

- Une fonction f dérivable à droite et dérivable à gauche en x_0 n'est pas forcement dérivable en x_0
- Ne pas croire que si une bijection f est dérivable sur un intervalle I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$: il faut que f' soit non nul sur I
- Ne pas croire que si f n'est pas paire alors elle est impaire : On a des fonctions paires, des fonctions impaires et des fonctions ni paires ni impaires